Masz problemy z **KOMBINATORYKĄ ?**

Wystarczy,
że wraz z nami
rozwiążesz
150 zadań.

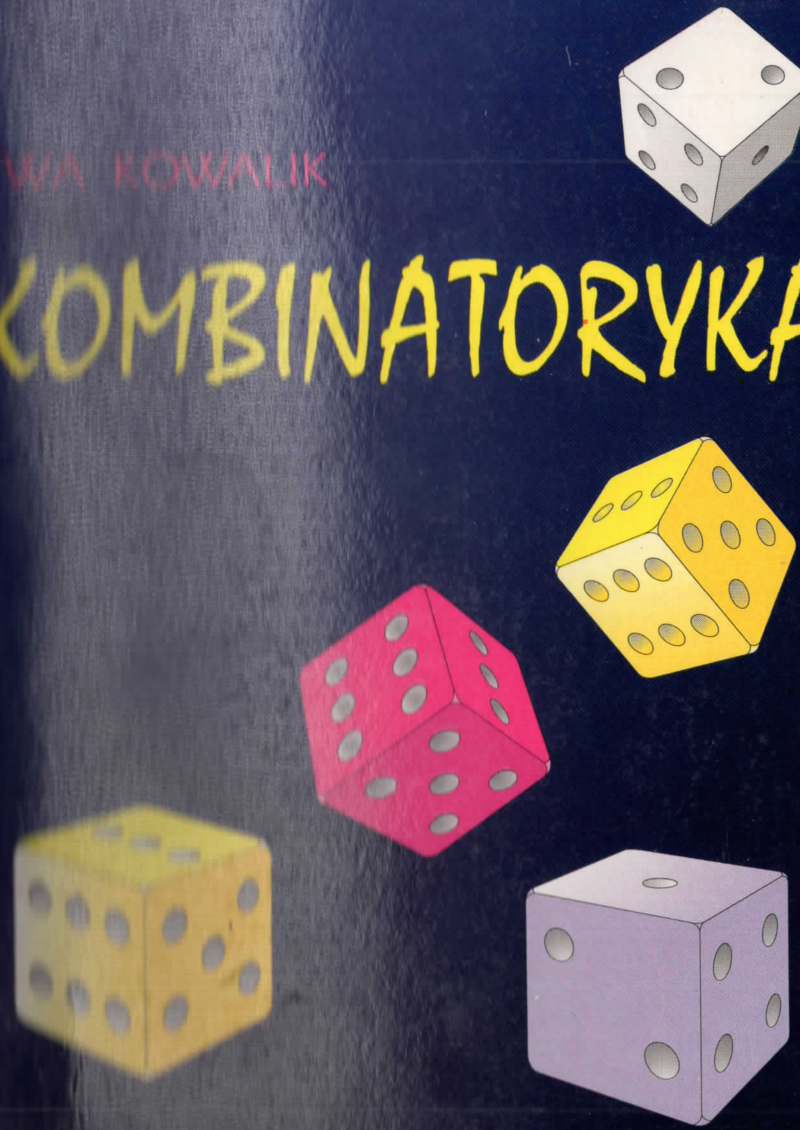
I po kłopocie!

ISBN 83-204-1590-X

NAUCZ SIĘ SAM

EWA KOWALIK

KOMBINATORYKA



WYDAWNICTWA NAUKOWO-TECHNICZNE

NAUCZ SIĘ SAM

EWA KOWALIK

KOMBINATORYKA

Wydawnictwa Naukowo-Techniczne Warszawa

Opinia merytoryczna
dr Maciej Bryński, dr Karol Szymański

Opinia językowa
dr Krystyna Długosz-Kurczabowa

Redakcja i przygotowanie do druku
Ewa Kowalik

Projekt okładki i opracowanie graficzne
Majka Siekierzyńska

519(075.3)

Książka jest zbiorem 150 zadań z kombinatoryki i podstaw rachunku prawdopodobieństwa podanych z wzorcowymi rozwiązaniami. Praca umożliwia samodzielne nauczenie się kombinatoryki. Może być też wykorzystywana jako podręcznik do nauki kombinatoryki w szkole średniej, jak również na zajęciach dodatkowych ze zdolnymi uczniami w szkole podstawowej.

ISBN 83-204-1590-X

Spis treści

Przedmowa

Niniejszy zbiór zadań został napisany na podstawie mojej pracy magisterskiej wykonanej na Wydziale Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego pod kierunkiem dr. hab. Marka Kordosa.

Jest on przeznaczony głównie dla uczniów szkół średnich, zarówno dla tych, którzy rozpoczęli już naukę kombinatoryki w szkole, jak również dla tych, którzy uczą się samodzielnie. Może się on okazać interesujący również dla zdolnych uczniów szkół podstawowych.

Praca ta bowiem nie zakłada znajomości podstaw kombinatoryki. Uczeń zdobywa je poprzez systematyczne i dokładne przestudiowanie części pierwszej, której celem jest wprowadzenie podstawowych czterech wzorów kombinatorycznych (wariacje z powtórzeniami, bez powtórzeń, permutacje i kombinacje). Wzory te nie są podane w postaci gotowych formuł do zapamiętania, ani w postaci twierdzeń z dowodami. Uczeń dochodzi do nich stopniowo, rozwiązując (sam lub z pomocą podanych dokładnych rozwiązań) kolejne zadania – od najprostszych, wręcz oczywistych, poprzez coraz bardziej złożone, które jednak w jasny sposób wynikają z poprzednich, aż do zadań najogólniejszych, których rozwiązania są faktycznie formalnymi dowodami owych czterech wzorów. Dzięki temu uczeń ma znacznie większe szanse swobodnego posługiwania się tymi wzorami w trakcie rozwiązywania następnych zadań z kombinatoryki i rachunku prawdopodobieństwa. Jest rzeczą bardzo istotną, aby te cztery podstawowe wzory były dla niego oczywiste i naturalne. Nie musi ich wtedy pamiętać, raczej będzie je stosował, kojarząc sposób ich wprowadzenia, często nawet bez konieczności uświadamiania sobie (w sensie nazewnictwa) tego, czy zadanie dotyczy np. kombinacji czy wariacji. Część pierwsza jest zakończona formalnymi definicjami, które umożliwiają dalej jednoznaczne i zwięzłe formułowanie rozwiązań. Podsumowanie zadań tej części stanowią owe cztery najważniejsze wzory, podane już z użyciem nowej terminologii wprowadzonej w definicjach.

Począwszy od części drugiej uczeń może korzystać z niniejszej pracy jak z typowego zbioru zadań. Praca ta różni się tym od typowego zbioru, że zawiera dokładne rozwiązania wszystkich zadań. Aby umożliwić uczniowi samodzielne próby dochodzenia do odpowiedzi, bez narzucania mu toku rozumowania, rozwiązania zostały umieszczone na końcu, w części trzeciej.

Zadania z rozdziałów od I do IV są związane z czterema twierdzeniami podanymi na końcu części pierwszej. Każdy z tych rozdziałów dotyczy jednego twierdzenia. Ich celem jest nauczenie korzystania z poznanych wzorów i rozpoznawania w zadaniach o różnych treściach tych samych problemów kombinatorycznych. Podobnie jak w części pierwszej zadania zostały tak dobrane, aby stanowiły pewne logiczne ciągi, a trudniejsze zadania wynikały z poprzednich, łatwiejszych.

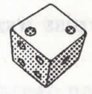
Rozdział V zawiera zadania z rachunku prawdopodobieństwa opartego jedynie na kombinatoryce. Na początku wprowadzono kilka niezbędnych pojęć, definicję prawdopodobieństwa i twierdzenie klasyczne. Pierwsze zadania mają na celu przybliżenie uczniowi pojęcia prawdopodobieństwa, są to więc proste zadania na zastosowanie definicji i twierdzenia. Wśród dalszych zadań pojawiają się takie, w których dowodzi się pewnych własności prawdopodobieństwa, potrzebnych przy rozwiązywaniu kolejnych zadań. W rozwiązaniach większości zadań w dalszym ciągu korzysta się z czterech wzorów wprowadzonych na początku. Celem tego rozdziału, oprócz zapoznania ucznia z pojęciem prawdopodobieństwa, jest nauczenie go rozpoznawania konkretnych problemów kombinatorycznych w zadaniach trudniejszych.

Praca ta może być pomocą dla nauczycieli uczących kombinatoryki.

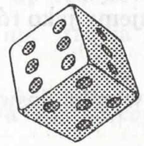
EWA KOWALIK

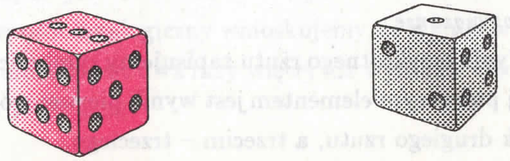
Warszawa, wrzesień 1992

Część pierwsza



ABC KOMBINATORYKI





1. Wykonujemy doświadczenie polegające na jednokrotnym rzucie monetą. Jakie są możliwe wyniki tego doświadczenia i ile ich jest?

Rozwiązanie

Są dwa wyniki takiego doświadczenia: orzeł lub reszka.

Będziemy je oznaczali literami: O i R.

2. Wykonujemy doświadczenie polegające na dwukrotnym rzucie monetą. Wypisz wszystkie możliwe wyniki tego doświadczenia.

Rozwiązanie

Wynik każdego doświadczenia zapisujemy symbolicznie jako parę uporządkowaną, której pierwszym elementem jest wynik pierwszego rzutu, a drugim – wynik drugiego rzutu.

Możliwe są następujące wyniki:

– 2 orły:	(O,O),
– 1 orzeł (za pierwszym lub drugim razem):	(O,R), (R,O),
– 0 orłów:	(R,R).

Innych możliwości nie ma.

Uwaga: wynik zapisujemy jako parę (dwójkę) uporządkowaną, np. (O,R), a nie jako zbiór dwuelementowy $\{O,R\}$, gdyż wyniki (O,R) i (R,O) traktujemy jako różne.

3. Wypisz wszystkie wyniki doświadczenia polegającego na trzykrotnym rzucie monetą.

Rozwiązanie

Wynik trzykrotnego rzutu zapisujemy symbolicznie jako trójkę, której pierwszym elementem jest wynik pierwszego rzutu, drugim – wynik drugiego rzutu, a trzecim – trzeciego.

Aby nie pominąć żadnego z możliwych wyników, wypisujemy je zgodnie z pewną ustaloną regułą, np.

– 3 orły	(i 0 reszek):	(O,O,O),
– 2 orły	(i 1 reszka za pierwszym, drugim lub trzecim razem):	$(R,O,O),(O,R,O),(O,O,R)$,
– 1 orzeł	(i 2 reszki; orzeł za pierwszym, drugim lub trzecim razem):	$(O,R,R),(R,O,R),(R,R,O)$,
– 0 orłów	(i 3 reszki):	(R,R,R).

Innych możliwości nie ma.

4. Oblicz, ile jest możliwych wyników doświadczenia polegającego na cztero- i pięciokrotnym rzucie monetą, bez wypisywania wszystkich wyników.

Rozwiązanie

Wyobraźmy sobie, że chcemy wypisać wszystkie możliwe wyniki (wszystkie uporządkowane czwórki). Trzeba znaleźć regułę, dzięki której będziemy mieli pewność, że nie opuścimy żadnego wyniku.

Aby rzucić czwarty raz monetą, trzeba najpierw rzucić nią trzy razy. Wiemy już, jakie są wyniki trzykrotnego rzutu, moglibyśmy więc do każdej uporządkowanej trójki z zad. 3 dopisać na czwartym miejscu wynik czwartego rzutu. Ponieważ mogą być dwa wyniki czwartego rzutu, więc z każdej uporządkowanej trójki powstałyby dwie uporządkowane czwórki, np. trójka (O,R,R) daje czwórki (O,R,R,O) i (O,R,R,R).

Czwórek jest więc dokładnie dwa razy więcej niż trójek, czyli $2 \cdot 8 = 16$.

Wiedząc już, że jest 16 możliwych wyników czterokrotnego rzutu monetą, w sposób analogiczny wnioskujemy, że wyników pięciokrotnego rzutu monetą jest dwa razy więcej niż wyników czterokrotnego rzutu, czyli $2 \cdot 16 = 32$.

5. Ile jest możliwych wyników doświadczenia polegającego na n-krotnym rzucie monetą? $(n \in N)$

Uwaga: w całej książce N oznacza zbiór liczb naturalnych, czyli całkowitych dodatnich, a więc zbiór $\{1, 2, 3, \ldots\}$.

Rozwiązanie

Oznaczmy liczbę wyników n-krotnego rzutu monetą przez a_n.

Spróbujmy odgadnąć wzór na a_n rozumując analogicznie jak w zad. 4, a następnie udowodnijmy jego poprawność indukcyjnie.

Zauważmy, że gdybyśmy mieli wypisane wyniki $(n-1)$-krotnego rzutu monetą, z łatwością wypisalibyśmy wyniki n-krotnego rzutu, dopisując na n-tym miejscu O lub R do każdego ciągu $(n-1)$-elementowego.

Stwierdzamy więc, że dla n-krotnego rzutu kostką jest 2 razy więcej wyników niż dla $(n-1)$-krotnego: $a_n = 2a_{n-1}$.

Podobnie, dla $(n-1)$-krotnego rzutu stwierdzamy, że $a_{n-1} = 2a_{n-2}$, a stąd otrzymujemy, że $a_n = 2a_{n-1} = 2 \cdot (2a_{n-2}) = 2^2 a_{n-2}$.

Dla $(n-2)$-krotnego rzutu $a_{n-2} = 2a_{n-3}$, więc $a_n = 2 \cdot (2^2 a_{n-2}) = 2^3 a_{n-3}$.

A zatem, jeśli cofniemy się aż do $n = 1$ (jednokrotny rzut monetą), otrzymamy $a_n = 2^{n-1} a_1$, a jak wiemy, np. z zad. 1, $a_1 = 2$, więc $a_n = 2^{n-1} \cdot 2 = 2^n$.

Sprawdźmy teraz poprawność tego wzoru indukcyjnie.

Krok 1.

Dla $n = 1$ otrzymujemy z naszego wzoru $a_1 = 2$. Jest to istotnie liczba możliwych wyników jednokrotnego rzutu monetą $((O), (R))$.

Krok 2.

Załóżmy, że wzór jest prawdziwy dla wszystkich $k \leq n$, czyli że dla każdego $k \leq n$ mamy $a_k = 2^k$.

Sprawdźmy, czy wzór jest prawdziwy dla $n+1$, to znaczy, czy $a_{n+1} = 2^{n+1}$.

Wiemy, że $a_{n+1} = 2a_n$, bo w $(n+1)$-krotnym rzucie mamy dwa razy więcej wyników niż w n-krotnym, a z założenia indukcyjnego $a_n = 2^n$, więc $a_{n+1} = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$.

Ponieważ zarówno w sprawdzeniu jak i w kroku indukcyjnym wzór okazał się słuszny, więc na mocy zasady indukcji matematycznej stwierdzamy, że dla każdego $n \in N$ $a_n = 2^n$.

6. Wykonujemy doświadczenie polegające na jednokrotnym rzucie sześcienną kostką do gry. Jakie są możliwe wyniki tego doświadczenia i ile ich jest?

Rozwiązanie

Jest 6 takich wyników:

- wypadło 1 oczko, – wypadły 4 oczka,
- wypadły 2 oczka, – wypadło 5 oczek,
- wypadły 3 oczka, – wypadło 6 oczek.

7. Wykonujemy doświadczenie polegające na dwukrotnym rzucie kostką. Wypisz wszystkie możliwe wyniki tego doświadczenia.

Rozwiązanie

Wynik każdego doświadczenia zapisujemy symbolicznie jako uporządkowaną parę; pierwsza liczba oznacza liczbę oczek, które wypadły w pierwszym rzucie, druga – w drugim.

Najwygodniej wypisać wszystkie wyniki w tabeli:

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Uzyskaliśmy $6^2 = 36$ różnych wyników.

8. Oblicz, ile jest możliwych wyników doświadczenia polegającego na trzykrotnym rzucie kostką. (Porównaj zad. 4.)

Rozwiązanie

Jeśli chcielibyśmy wypisywać wszystkie uporządkowane trójki będące wynikami takiego doświadczenia, to musielibyśmy dopisywać wszystkie możliwe wyniki trzeciego rzutu do wszystkich uporządkowanych par z zad. 7, np. z pary (3,6) otrzymalibyśmy następujące trójki: (3,6,1), (3,6,2), (3,6,3), (3,6,4), (3,6,5), (3,6,6).

Stwierdzamy zatem, że wyników trzykrotnego rzutu kostką jest 6 razy więcej niż wyników dwukrotnego rzutu, czyli $6 \cdot 6^2 = 6^3$.

9. Ile jest możliwych wyników doświadczenia polegającego na n-krotnym rzucie kostką? ($n \in N$)

Rozwiązanie

Oznaczmy liczbę wyników n-krotnego rzutu kostką przez b_n.

Na podstawie rozumowania zastosowanego w zad. 8 i wnioskowania przez analogię do n-krotnego rzutu monetą (zad. 5) dochodzimy do przekonania, że $b_n = 6^n$ (moneta ma 2 strony, może więc upaść na 2 sposoby; kostka ma 6 ścian, może więc upaść na 6 sposobów).

Sprawdźmy teraz poprawność tego wzoru indukcyjnie.

Krok 1.

Dla $n = 1$ otrzymujemy z naszego wzoru $b_1 = 6$. Jest to istotnie liczba możliwych wyników jednokrotnego rzutu kostką ((1),(2),(3),(4),(5),(6)).

Krok 2.

Załóżmy, że wzór jest prawdziwy dla wszystkich $k \leq n$, czyli że dla każdego $k \leq n$ mamy $b_k = 6^k$.

Sprawdźmy, czy wzór jest prawdziwy dla $n + 1$, to znaczy, czy $b_{n+1} = 6^{n+1}$.

Wiemy, że wyników $(n+1)$-krotnego rzutu kostką jest 6 razy więcej niż wyników n-krotnego rzutu, czyli $b_{n+1} = 6b_n$, a z założenia indukcyjnego $b_n = 6^n$, więc $b_{n+1} = 6 \cdot 6^n = 6^{n+1}$.

Ponieważ zarówno w sprawdzeniu jak i w kroku indukcyjnym wzór

okazał się słuszny, więc na mocy zasady indukcji matematycznej stwierdzamy, że dla każdego $n \in N$ $b_n = 6^n$.

10. W urnie jest 10 kul ponumerowanych od 1 do 10. Losujemy kulę, zapisujemy jej numer i ponownie wrzucamy ją do urny. Czynność tę powtarzamy 3 razy, przy czym numery wylosowanych kul zapisujemy w kolejności losowania (jeden za drugim). Ile różnych wyników możemy w ten sposób uzyskać?

Rozwiązanie

Po pierwszym losowaniu możemy otrzymać 10 różnych wyników. Po drugim losowaniu do ustalonego numeru kuli z pierwszego losowania dopisujemy numer kuli z drugiego losowania (znowu 10 możliwości), a więc wyników dwukrotnego losowania jest 10 razy więcej niż jednokrotnego, czyli 10^2, trzykrotnego zaś – 10 razy więcej niż dwukrotnego, czyli 10^3.

11. W urnie jest 10 kul ponumerowanych od 1 do 10. Losujemy n razy jedną kulę i ponownie wrzucamy ją do urny, a następnie uzyskane numery zapisujemy w kolejności losowania. Ile różnych wyników możemy w ten sposób uzyskać?

Rozwiązanie

Jeżeli będziemy kontynuować tok rozumowania zastosowany w zad. 10, to dojdziemy do wniosku, że dla n losowań jest 10^n takich wyników.

Dowód indukcyjny.

Oznaczmy liczbę wyników n-krotnego losowania kuli przez c_n.

Krok 1.

Dla $n = 1$ otrzymujemy z naszego wzoru $c_1 = 10$. Jest to istotnie liczba możliwych wyników jednokrotnego losowania kuli spośród 10 różnych kul ((1),(2),...,(10)).

Krok 2.

Załóżmy, że dla każdego $k \leq n$ mamy $c_k = 10^k$.

Sprawdźmy, czy wzór jest prawdziwy dla $n+1$, to znaczy, czy $c_{n+1} = 10^{n+1}$.

Wiemy, że $c_{n+1} = 10c_n$, bo po każdym kolejnym losowaniu mamy 10 razy więcej wyników niż po losowaniu poprzednim, a z założenia indukcyjnego $c_n = 10^n$, więc $c_{n+1} = 10 \cdot 10^n = 10^{n+1}$.

Ponieważ zarówno w sprawdzeniu jak i w kroku indukcyjnym wzór okazał się słuszny, więc na mocy zasady indukcji matematycznej stwierdzamy, że dla każdego $n \in N$ $c_n = 10^n$.

12. W urnie jest m kul ponumerowanych od 1 do m. Losujemy 3 razy jedną kulę i ponownie wrzucamy ją do urny, a następnie uzyskane numery zapisujemy w kolejności losowania. Ile różnych wyników możemy w ten sposób uzyskać?

Rozwiązanie

Po pierwszym losowaniu możemy otrzymać m różnych wyników. Wyników dwukrotnego losowania jest m razy więcej niż jednokrotnego, czyli m^2 (porównaj zad. 10), zaś trzykrotnego – m razy więcej niż dwukrotnego, czyli m^3.

13. W urnie jest m kul ponumerowanych od 1 do m. Losujemy n razy jedną kulę i ponownie wrzucamy ją do urny, a następnie uzyskane numery zapisujemy w kolejności losowania. Ile różnych wyników możemy w ten sposób uzyskać?

Rozwiązanie

Na podstawie rozwiązań zad. 11 i 12 dochodzimy do wniosku, że jest m^n takich wyników.

Dowód indukcyjny ze względu na n.

Oznaczmy liczbę wyników n-krotnego losowania kuli przez d_n.

Krok 1.

Dla $n = 1$ otrzymujemy z naszego wzoru $d_1 = m$. Jest to istotnie liczba możliwych wyników jednokrotnego losowania kuli spośród m różnych kul ((1),(2),...,(m)).

Krok 2.

Załóżmy, że dla każdego $k \leq n$ mamy $d_k = m^k$.

Sprawdźmy, czy wzór jest prawdziwy dla $n+1$, to znaczy, czy $d_{n+1} = m^{n+1}$.

Wiemy, że $d_{n+1} = md_n$, bo po każdym kolejnym losowaniu mamy m razy więcej wyników niż po losowaniu poprzednim, a skoro z założenia indukcyjnego $d_n = m^n$, więc $d_{n+1} = m \cdot m^n = m^{n+1}$.

Ponieważ zarówno w sprawdzeniu jak i w kroku indukcyjnym wzór okazał się słuszny, więc na mocy zasady indukcji matematycznej stwierdzamy, że dla każdego $n \in N$ $d_n = m^n$.

14. Ile jest różnych ciągów n-elementowych o elementach ze zbioru m-elementowego?

Rozwiązanie

Zauważmy, że wypisywanie takich ciągów to to samo, co wypisywanie wyników doświadczenia z zad. 13 (wyniki te można było traktować jako ciągi). Ciągów takich jest więc m^n.

15. Ile jest różnych funkcji ze zbioru n-elementowego w zbiór m-elementowy?

Rozwiązanie

Aby określić funkcję, trzeba podać wartości funkcji dla każdego jej argumentu. Wartości te utworzą ciąg. Będzie to ciąg n-elementowy (bo jest n argumentów funkcji) o elementach ze zbioru m-elementowego (bo zbiór wartości jest m-elementowy). Funkcji tych jest tyle, ile takich ciągów, czyli, jak wynika z poprzedniego zadania, m^n.

Wszystkie poprzednie zadania dotyczyły właśnie liczby funkcji ze zbioru n-elementowego w zbiór m-elementowy, gdzie n i m były różnymi liczbami w zależności od doświadczenia.

W zadaniach dotyczących rzutu monetą m było równe 2 (tyle jest możliwych wyników pojedynczego rzutu monetą; zbiór wartości funkcji jest 2-elementowy), a n było liczbą rzutów.

W zadaniach dotyczących rzutu kostką m było równe 6 (tyle jest możliwych wyników pojedynczego rzutu kostką; zbiór wartości funkcji jest 6-elementowy), n również było liczbą rzutów.

W zadaniach dotyczących losowania (ze zwracaniem) kul z urny m było liczbą kul (może być m wyników pojedynczego losowania kuli; zbiór wartości funkcji jest m-elementowy), a n było liczbą losowań.

16. W urnie jest 10 kul ponumerowanych od 1 do 10. Losujemy kulę, zapisujemy jej numer i nie wrzucamy jej ponownie do urny. Czynność tę powtarzamy 3 razy, a numery wylosowanych kul zapisujemy w kolejności losowania. Ile różnych wyników możemy w ten sposób uzyskać?

Rozwiązanie

Po pierwszym losowaniu możemy otrzymać 10 różnych wyników.

Po drugim losowaniu do ustalonego numeru kuli z pierwszego losowania dopisujemy numer kuli z drugiego losowania, ale w drugim losowaniu mamy już tylko 9 kul (wylosowanych kul nie zwracamy do urny), a więc wyników dwukrotnego losowania jest 9 razy więcej niż jednokrotnego, czyli $10 \cdot 9$. W trzecim losowaniu mamy 8 kul, więc wyników trzykrotnego losowania jest 8 razy więcej niż dwukrotnego, czyli $10 \cdot 9 \cdot 8$.

17. W urnie jest 10 kul ponumerowanych od 1 do 10. Losujemy n razy jedną kulę (nie wrzucamy jej ponownie do urny) i zapisujemy uzyskane numery w kolejności losowania. Ile różnych wyników możemy w ten sposób uzyskać?

Rozwiązanie

Jeśli będziemy kontynuować rozumowanie zastosowane w zad. 16 dla n losowań, to dojdziemy do przekonania, że jest

$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (10-(n-1))$ takich wyników. Konieczne jest przy tym założenie, że $n \leq 10$, w przeciwnym razie wykonanie takiego doświadczenia nie jest możliwe.

Dowód indukcyjny.

Oznaczmy liczbę wyników n-krotnego losowania kuli przez e_n.

Krok 1.

Dla $n = 1$ otrzymujemy z naszego wzoru $e_1 = 10$. Jest to istotnie liczba możliwych wyników jednokrotnego losowania kuli spośród 10 różnych kul ((1),(2),...,(10)).

Krok 2.

Załóżmy, że dla każdego $k \leq n < 10$ mamy

$e_k = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (10-(k-1))$.

Sprawdźmy, czy wzór jest prawdziwy dla $n+1$, to znaczy, czy $e_{n+1} = = 10 \cdot 9 \cdot 8 \ldots (10-n)$.

W losowaniu $(n+1)$ w urnie znajduje się $(10-n)$ kul, gdyż n kul zostało już wyjętych z urny w czasie pierwszych n losowań. Zatem w losowaniu $(n+1)$ możliwych jest $(10-n)$ wyników, czyli wyników $(n+1)$ losowań jest $(10-n)$ razy więcej niż wyników n losowań, czyli $e_{n+1} = (10-n)e_n$. Z założenia indukcyjnego wiemy, że

$e_n = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (10-(n-1))$, więc

$e_{n+1} = (10-n)(10 \cdot 9 \cdot 8 \ldots (10-(n-1))) =$

$= 10 \cdot 9 \cdot 8 \ldots (10-(n-1)) \cdot (10-n) =$

$= 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (10-n)$.

Ponieważ zarówno w sprawdzeniu jak i w kroku indukcyjnym wzór okazał się słuszny, więc na mocy zasady indukcji matematycznej stwierdzamy, że dla każdego $n \in N$, $n \leq 10$,

$e_n = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (10-(n-1))$.

18. W urnie jest m kul ponumerowanych od 1 do m. Losujemy 3 razy jedną kulę (nie wrzucamy jej ponownie do urny) i zapisujemy uzyskane numery w kolejności losowania. Ile różnych wyników możemy w ten sposób uzyskać?

Rozwiązanie

Konieczne jest założenie, że $m \geq 3$.

Po pierwszym losowaniu możemy otrzymać m różnych wyników.

Wyników dwukrotnego losowania jest $(m-1)$ razy więcej niż jednokrotnego – w drugim losowaniu mamy w urnie $(m-1)$ kul – czyli

$m(m-1)$ (porównaj zad. 16), trzykrotnego zaś – $(m-2)$ razy więcej niż dwukrotnego, czyli $m(m-1)(m-2)$.

19. W urnie jest m kul ponumerowanych od 1 do m. Losujemy n razy jedną kulę (nie wrzucamy jej ponownie do urny) i zapisujemy uzyskane numery w kolejności losowania. Ile różnych wyników możemy w ten sposób uzyskać?

Rozwiązanie

Jeśli będziemy rozumować w ten sam sposób co w zad. 17 i 18, to dojdziemy do wniosku, że jest $m(m-1)(m-2)...(m-(n-1))$ takich wyników, przy czym konieczne jest założenie, że $n \leq m$.

Dowód indukcyjny ze względu na n.

Oznaczmy liczbę wyników n-krotnego losowania kuli bez zwracania przez f_n.

Krok 1.

Dla $n = 1$ otrzymujemy z naszego wzoru $f_1 = m$. Jest to istotnie liczba możliwych wyników jednokrotnego losowania kuli spośród m różnych kul ((1),(2),...,(m)).

Krok 2.

Załóżmy, że dla każdego $k \leq n < m$ mamy

$f_k = m(m-1)(m-2)...(m-(k-1))$.

Sprawdźmy, czy wzór jest prawdziwy dla $n+1$, to znaczy, czy $f_{n+1} = m(m-1)(m-2)...(m-n)$.

W losowaniu $(n+1)$ w urnie znajduje się $(m-n)$ kul, gdyż n kul zostało już wyjętych z urny w czasie pierwszych n losowań. Zatem w losowaniu $(n+1)$ możliwych jest $(m-n)$ wyników, czyli wyników $(n+1)$ losowań jest $(m-n)$ razy więcej niż wyników n losowań, czyli $f_{n+1} = (m-n)f_n$. Z założenia indukcyjnego wiemy, że

$f_n = m(m-1)(m-2)...(m-(n-1))$, więc

$f_{n+1} = (m-n)[m(m-1)(m-2)...(m-(n-1))] =$

$= m(m-1)(m-2)...(m-(n-1))(m-n) =$

$= m(m-1)(m-2)...(m-n)$.

Ponieważ zarówno w sprawdzeniu jak i w kroku indukcyjnym wzór okazał się słuszny, więc na mocy zasady indukcji matematycznej stwierdzamy, że dla każdego $n \in N$, $n \leq m$,

$f_n = m(m-1)(m-2)...(m-(n-1))$.

20. Ile jest różnych ciągów n-elementowych o nie powtarzających się elementach ze zbioru m-elementowego?

Rozwiązanie

Wypisywanie takich ciągów to to samo, co wypisywanie wyników doświadczenia z zad. 19 (wyniki te można było traktować jako ciągi, a ponieważ losowanie odbywało się bez zwracania kul do urny, więc elementy ciągów nie będą się powtarzać).

Ciągów takich jest więc $m(m-1)(m-2)...(m-(n-1))$.

21. Ile jest różnych funkcji różnowartościowych ze zbioru n-elementowego w zbiór m-elementowy?

Rozwiązanie

Aby określić funkcję trzeba podać wartości funkcji dla każdego jej argumentu. Wartości te utworzą ciąg. Będzie to ciąg n-elementowy (bo jest n argumentów funkcji) o elementach ze zbioru m-elementowego (bo zbiór wartości jest m-elementowy). Aby funkcja była różnowartościowa, żadnym dwóm argumentom funkcji nie może odpowiadać ta sama wartość funkcji, czyli w powstałym ciągu elementy nie będą się powtarzać. A zatem funkcji tych jest tyle, ile ciągów n-elementowych o nie powtarzających się elementach ze zbioru m-elementowego, czyli, jak wynika z poprzedniego zadania, $m(m-1)(m-2)...(m-(n-1))$.

Zadania od 16 do 20 dotyczyły właśnie liczby funkcji różnowartościowych ze zbioru n-elementowego w zbiór m-elementowy, gdzie m było liczbą kul znajdujących się w urnie, a n było liczbą losowań.

22. Na ile sposobów można ustawić w ciąg trzy elementy pewnego zbioru? Wypisz wszystkie takie ciągi.

Rozwiązanie

Oznaczmy elementy tego zbioru przez a_1, a_2, a_3.

Ustalmy a_1 na pierwszym miejscu. Otrzymamy dwa ciągi: (a_1, a_2, a_3) i (a_1, a_3, a_2).

Podobnie, jeśli ustalimy a_2 lub a_3 na pierwszym miejscu, to otrzymamy odpowiednie dwie pary ciągów:

(a_2, a_1, a_3), (a_2, a_3, a_1) i (a_3, a_1, a_2), (a_3, a_2, a_1).

Innych możliwości nie ma, jest więc 6 takich ciągów.

23. Oblicz, na ile sposobów można ustawić w ciąg:

a) cztery elementy pewnego zbioru,

b) pięć elementów pewnego zbioru?

Rozwiązanie

a) Oznaczmy elementy tego zbioru przez a_1, a_2, a_3, a_4.

Ustalmy a_1 na pierwszym miejscu. Otrzymamy wtedy tyle ciągów, ile można ich uzyskać po ustawieniu pozostałych trzech elementów, tj. a_2, a_3, a_4 na trzech pozostałych miejscach, czyli – jak wykazaliśmy w poprzednim zadaniu – 6.

Ustalmy a_2 na pierwszym miejscu. Pozostałe trzy elementy ustawmy w ciągi na pozostałych trzech miejscach, otrzymamy znowu 6 różnych ciągów.

Podobnie dla a_3 lub a_4 ustalonych na pierwszym miejscu otrzymujemy również po 6 ciągów.

Wszystkich ciągów otrzymaliśmy więc $4 \cdot 6 = 24$.

b) Jeżeli na pierwszym miejscu ustalimy a_1, to pozostaną do ustawienia 4 elementy na 4 miejscach – otrzymamy 24 ciągi (zad. 23a).

Podobnie z a_2 na pierwszym miejscu – również otrzymamy 24 ciągi – i z a_3, a_4, a_5 – w każdym przypadku otrzymamy po 24 ciągi.

Wszystkich ciągów jest więc $24 \cdot 5 = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$.

24. Na ile sposobów można ustawić w ciąg n elementów pewnego zbioru?

Rozwiązanie

Oznaczmy elementy tego zbioru przez a_1, a_2, ..., a_n.

Jeśli będziemy rozumować w sposób analogiczny jak w zad. 23, to dojdziemy do wniosku, że ciągów n elementów jest n razy więcej niż ciągów $(n-1)$ elementów, czyli $n(n-1)$ razy więcej niż ciągów $(n-2)$ elementów, a zatem $n(n-1)(n-2)$ razy więcej niż ciągów $(n-3)$ elementów.

Jeżeli w każdym kroku będziemy zmniejszali liczbę ustawianych w ciąg elementów o 1, dojdziemy w końcu do liczby ciągów otrzymanych z 5 elementów, którą już znamy.

Ciągów n elementów jest więc $n(n-1)(n-2)...(n-(n-6))$ razy więcej niż ciągów 5 elementów, czyli $[n(n-1)(n-2)\cdot...\cdot 6]\cdot(5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1)$.

Zanim przystąpimy do udowodnienia powyższego wzoru, zapoznajmy się z definicją pewnego symbolu matematycznego, który bardzo upraszcza rachunki, czyni je przejrzystymi.

DEFINICJA **symbolu $n!$** (czytaj: n silnia)

Dla każdego $n \in N$ $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-1) \cdot n$; przyjmujemy $0! = 1$.

Teraz możemy już kontynuować rozwiązywanie zadania.

Dowód indukcyjny.

Oznaczmy przez g_n liczbę ciągów, które można ustawić z n elementów. Wykażemy, że $g_n = n!$.

Krok 1.

Dla $n = 1$ otrzymujemy z naszego wzoru $g_1 = 1$. Jest to istotnie liczba możliwych ciągów 1-elementowych.

Krok 2.

Załóżmy, że wzór jest prawdziwy dla wszystkich $k \leq n$, czyli że dla każdego $k \leq n$ mamy $g_k = k!$.

Sprawdźmy, czy wzór jest prawdziwy dla $n+1$, to znaczy, czy $g_{n+1} = (n+1)!$.

Wiemy, że liczba g_{n+1} jest $(n+1)$ razy większa od liczby g_n, czyli że $g_{n+1} = (n+1) \cdot g_n$, a po wykorzystaniu założenia indukcyjnego otrzymujemy $g_{n+1} = (n+1) \cdot n! = (n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = (n+1)!$.

Ponieważ zarówno w sprawdzeniu jak i w kroku indukcyjnym wzór okazał się słuszny, więc na mocy zasady indukcji matematycznej stwierdzamy, że dla każdego $n \in N$ $g_n = n!$.

25. Ile jest różnych funkcji różnowartościowych ze zbioru n-elementowego w zbiór n-elementowy?

Rozwiązanie

Sposób pierwszy

Wiemy, że funkcji różnowartościowych ze zbioru n-elementowego w zbiór m-elementowy jest $m(m-1)\ldots(m-(n-1))$ (zad. 21).

Jeżeli przyjmiemy $m = n$, to powyższy wzór będzie miał postać: $n(n-1)\ldots(n-(n-1)) = n(n-1) \cdot \ldots \cdot 1 = n!$.

Otrzymaliśmy zatem, że istnieje $n!$ funkcji różnowartościowych ze zbioru n-elementowego w zbiór n-elementowy.

Sposób drugi

Aby określić funkcję trzeba podać wartości dla każdego jej argumentu. Wartości te utworzą ciąg. W każdym takim ciągu wystąpią wszystkie wartości funkcji, gdyż jest ich tyle, ile argumentów funkcji, a funkcja jest różnowartościowa. Funkcji różnowartościowych ze zbioru n-elementowego w zbiór n-elementowy jest więc tyle, ile istnieje ciągów n elementów, jak zatem wynika z poprzedniego zadania – $n!$.

26. Spośród m kul ponumerowanych od 1 do m wybieramy kolejno (bez zwracania) n kul ($n \leq m$);

a) z numerów wylosowanych kul tworzymy ciąg (kolejność ma znaczenie),

b) z numerów wylosowanych kul tworzymy zbiór (kolejność nie ma znaczenia).

Ile różnych ciągów, a ile zbiorów możemy w ten sposób otrzymać?

Rozwiązanie

a) Ciągów takich, jak wynika z zad. 20, jest $m(m-1)\ldots(m-(n-1))$.

b) Jeśli wiemy, ile mamy ciągów, to łatwo możemy obliczyć, ile mamy zbiorów. Trzeba tylko stwierdzić, ile różnych ciągów daje taki sam zbiór; np. dla $n = 3$ ciągi (1,2,3), (1,3,2), (2,1,3), (2,3,1), (3,1,2), (3,2,1) dają zbiór $\{1,2,3\}$.

Oczywiście wyrazy takich ciągów muszą być takie same, mogą różnić się tylko kolejnością. A ponieważ wszystkich ciągów o n ustalonych różnych wyrazach jest $n!$, więc zbiorów o n ustalonych różnych elementach jest $n!$ razy mniej niż ciągów składających się z tych samych elementów.

Otrzymujemy więc, że liczba zbiorów jest równa

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-(n-1))}{n!} = \frac{m!}{(m-n)! \cdot n!}.$$

W tym miejscu poznajmy jeszcze jeden symbol matematyczny, który, podobnie jak wprowadzony wcześniej symbol $n!$, ułatwi nam dalsze rachunki.

DEFINICJA symbolu Newtona

Niech $m, n \in N \cup \{0\}$ i $m \geq n$. Wówczas $\binom{m}{n}$ nazywamy symbolem Newtona i $\binom{m}{n} = \frac{m!}{n! \cdot (m-n)!}$.

Możemy więc napisać, że liczba n-elementowych zbiorów utworzonych z m elementów jest równa $\binom{m}{n}$.

Podsumowanie

Poniżej znajdują się cztery definicje, które ułatwią sformułowanie umieszczonych dalej czterech twierdzeń będących podsumowaniem zadań części pierwszej.

DEFINICJA 1. n-wyrazową **wariacją z powtórzeniami** zbioru Y złożonego z m różnych elementów nazywamy każdą funkcję f odwzorowującą zbiór X złożony z n różnych elementów w zbiór Y. (Porównaj zad. 1 – 15.)

DEFINICJA 2. n-wyrazową **wariacją bez powtórzeń** zbioru Y złożonego z m różnych elementów nazywamy każdą funkcję różnowartościową f odwzorowującą zbiór X złożony z n różnych elementów w zbiór Y. (Porównaj zad. 16 – 21 i 26a.)

DEFINICJA 3. **Permutacją** zbioru Y złożonego z n różnych elementów nazywamy każdą funkcję różnowartościową f odwzorowującą zbiór X złożony z n różnych elementów w zbiór Y. (Porównaj zad. 22 – 25.)

DEFINICJA 4. n-elementową **kombinacją** zbioru Y złożonego z m różnych elementów, gdzie $0 \leq n \leq m$, nazywamy każdy podzbiór złożony z n różnych elementów zbioru Y. (Porównaj zad. 26b.)

TWIERDZENIE 1. Liczba n-wyrazowych wariacji z powtórzeniami zbioru Y złożonego z m różnych elementów jest równa m^n. (Dowód – zad. 15.)

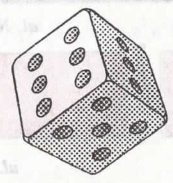
TWIERDZENIE 2. Liczba n-wyrazowych wariacji bez powtórzeń zbioru Y złożonego z m różnych elementów dla $n \leq m$ jest równa $m(m-1)...(m-(n-1)) = \frac{m!}{(m-n)!}$. (Dowód – zad. 21.)

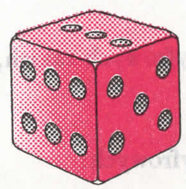
TWIERDZENIE 3. Liczba permutacji zbioru Y złożonego z n różnych elementów jest równa $n!$. (Dowód – zad. 25.)

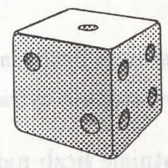
TWIERDZENIE 4. Liczba n-elementowych kombinacji zbioru Y złożonego z m różnych elementów, gdzie $0 \leq n \leq m$, jest równa $\binom{m}{n}$. (Dowód – zad. 26b.)

Część druga

ZADANIA







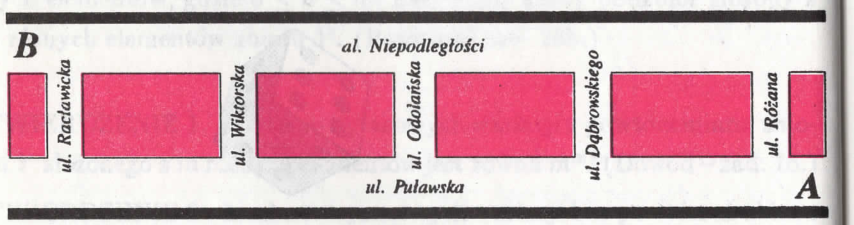
Rozdział I

WARIACJE Z POWTÓRZENIAMI

I.1. Wypisz wszystkie funkcje $f : X \longrightarrow Y$, gdzie:
a) $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b\}$; b) $X = \{a, b\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$.
Czy można policzyć, ile jest takich funkcji bez ich wypisywania?

I.2. Mamy 10 różnych piłek i 2 różne pudła. Każdą piłkę wrzucamy do jednego z pudeł. Na ile sposobów można to zrobić?

I.3. Pewna osoba miała przedostać się najkrótszą drogą z punktu A do punktu B (rys. 1), a następnie wrócić z punktu B do punktu A. Szła tylko narysowanymi ulicami. Na ile sposobów mogła wybrać trasę?



rys. 1

I.4. Ile istnieje liczb naturalnych pięciocyfrowych takich, w których zapisie nie występuje cyfra zero?

I.5. Ile istnieje liczb naturalnych pięciocyfrowych?

I.6. Ile istnieje liczb naturalnych pięciocyfrowych takich, w których cyfrą setek jest 5?

I.7. Rzucamy 3 razy monetą, a następnie 4 razy kostką do gry. Ile różnych wyników tego doświadczenia możemy uzyskać?

I.8. Grupa znajomych przyszła do ciastkarni, w której było 8 rodzajów ciastek. Każdy kupił jedno ciastko. Z ilu osób składała się ta grupa, jeżeli wiadomo, że mogło być 512 różnych możliwości wyboru?

Rozdział II

WARIACJE BEZ POWTÓRZEŃ

II.1. Wypisz wszystkie funkcje różnowartościowe $f : X \longrightarrow Y$, gdzie:
a) $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b\}$; b) $X = \{a, b\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$.
Czy można policzyć, ile jest takich funkcji bez ich wypisywania?

II.2. W kawiarni, do której przyszło 7 osób, było 10 gatunków ciastek. Każdy kupił jedno ciastko, przy czym każdy wybrał inne. Ile jest możliwości wystąpienia takiego zdarzenia?

II.3. Pewna osoba miała przedostać się najkrótszą drogą z punktu A do punktu B (rys. 1), a następnie wrócić z punktu B do punktu A. Szła tylko narysowanymi ulicami. Na ile sposobów mogła wybrać trasę, jeśli nie chciała wracać tą samą drogą?

II.4. Ile istnieje liczb naturalnych pięciocyfrowych o nie powtarzających się cyfrach takich, w których zapisie nie występuje cyfra zero?

II.5. Ile istnieje liczb naturalnych pięciocyfrowych o nie powtarzających się cyfrach?

II.6. Ile istnieje liczb naturalnych pięciocyfrowych o nie powtarzających się cyfrach, których cyfrą setek jest 5?

II.7. W grupie składającej się z 3 dziewcząt i 5 chłopców, urodzonych w tym samym roku, żadna para dziewcząt i żadna para chłopców nie obchodzi urodzin tego samego dnia roku. Ile jest możliwości wystąpienia takiego zdarzenia ze względu na daty urodzin tych ośmiu osób?

II.8. Z ilu osób składa się grupa, jeżeli wiadomo, że na 5 miejscach osoby te mogą usiąść na 60 sposobów?

Rozdział III

PERMUTACJE

III.1. Wypisz wszystkie funkcje różnowartościowe $f : X \longrightarrow Y$, gdzie:
$X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b, c\}$.
Czy można policzyć, ile jest takich funkcji bez ich wypisywania?

III.2. Ile różnych liczb czterocyfrowych można utworzyć z cyfr 1, 2, 3, 4 tak, aby żadna cyfra w liczbie się nie powtarzała?

III.3. Ile różnych liczb pięciocyfrowych można utworzyć z cyfr 0, 1, 2, 3, 4 tak, aby żadna cyfra w liczbie się nie powtarzała?

III.4. Ile różnych liczb sześciocyfrowych można utworzyć z cyfr 0, 1, 2, 3, 4, 5 tak, aby żadna cyfra w liczbie nie powtarzała się i aby na miejscu dziesiątek stała cyfra 5 lub 6?

III.5. Rodzina 6-osobowa (rodzice i czworo dzieci) ustawia się w szeregu do zdjęcia. Ile różnych fotografii można otrzymać, jeżeli:
a) każdy może stać koło każdego,
b) rodzice stoją na dwóch końcach szeregu?

III.6. 20-osobowa grupa wsiada do autobusu. Najpierw wsiada 12 pań, a za nimi 8 panów. Ile istnieje różnych możliwości tego zdarzenia?

III.7. Ile jest sposobów ustawienia na półce dzieła 5-tomowego, tak aby:
a) tomy I i II stały koło siebie,
b) tomy I i II nie stały koło siebie?

III.8. Na ile sposobów można rozsadzić:

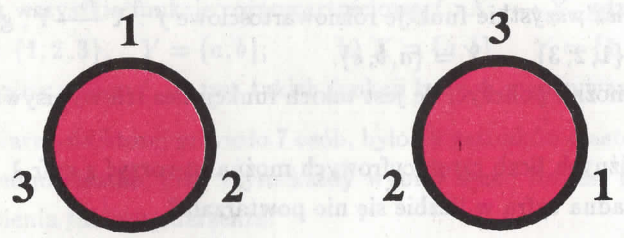
a) 3 osoby na 3-osobowej karuzeli,

b) 4 osoby na 4-osobowej karuzeli,

c) 5 osób na 5-osobowej karuzeli,

d) n osób na n-osobowej karuzeli?

Uwaga: dwa rozsadzenia uważamy za różne, jeżeli co najmniej jedna osoba ma co najmniej z jednej strony innego sąsiada, takie zaś rozsadzenia jak na rys. 2 są identyczne (karuzela się kręci).



rys. 2

III.9. Na ile sposobów można rozsadzić:

a) 2 osoby,

b) 3 osoby,

c) 4 osoby,

d) n osób

przy okrągłym stole na ustalonych miejscach?

Uwaga: rozsadzenia przedstawione na rys. 2 traktujemy jako różne.

III.10. Dziecko bawi się klockami, na których są wyrzeźbione litery

a) M, A, R, T, A;

b) L, A, L, K, A.

Dziecko układa klocki jeden za drugim. Ile różnych słów może z tych klocków ułożyć?

III.11. Ile różnych liczb pięciocyfrowych można otrzymać z cyfr 1, 1, 1, 2, 2?

III.12. Znajdź liczbę rozdań przy grze w brydża, w których każdy z grających otrzyma dokładnie jednego asa i jednego króla.

III.13. Mamy:

k_1 elementów typu 1 (nierozróżnialnych),

k_2 elementów typu 2 (nierozróżnialnych),

k_3 elementów typu 3 (nierozróżnialnych),

....

k_n elementów typu n (nierozróżnialnych)

(np. kule o n kolorach).

Na ile różnych sposobów można uporządkować w rzędzie te elementy?

III.14. Na ile sposobów można nawlec na sznurek 10 korali: 4 czarne, 4 czerwone i 2 białe, jeśli ustalimy początek i koniec sznurka?

III.15. Ile różnych nieparzystych liczb sześciocyfrowych można ułożyć z cyfr 2, 2, 4, 4, 7, 9?

III.16. Mając do dyspozycji 8 cyfr, niekoniecznie różnych (np. wypisanych na ośmiu karteczkach) można z nich ułożyć 56 liczb 8-cyfrowych. Ile cyfr wśród ośmiu danych jest jednakowych?

Rozdział IV

KOMBINACJE

IV.1. Wypisz wszystkie 2-elementowe podzbiory zbioru $\{1,2,3,4,5\}$. Czy można policzyć, ile jest tych podzbiorów bez ich wypisywania? A ile jest podzbiorów 3-elementowych tego zbioru?

IV.2. Na ile sposobów można wybrać 3 osoby z grupy 6 osób?

IV.3. Na ile sposobów można podzielić grupę 8-osobową na dwie grupy: 5-osobową i 3-osobową?

IV.4. Na ile sposobów można podzielić grupę 8-osobową na dwie równe grupy?

IV.5. Mamy do wyboru 3 rodzaje chlebów i 4 rodzaje bułek. Chcemy kupić 2 różne chleby i 2 różne bułki. Na ile sposobów możemy to zrobić?

IV.6. Na ile sposobów można rozmieścić 30 książek na 4 półkach tak, aby na pierwszej półce było 10 książek, na drugiej – 8, na trzeciej – 7, a na czwartej – 5?

IV.7. Z talii 52 kart losujemy 10 kart. Ile istnieje możliwych wyników losowania, w których wylosujemy 2 damy?

IV.8. Z 24 kart wybieramy 5. Ile jest takich wyborów, w których dostaniemy:

a) 5 kart w jednym kolorze,

b) 1 parę i 1 trójkę,

c) 2 pary?

Uwaga: para (trójka) to dwie (trzy) takie same figury różnych kolorów, np. dwie piątki, dwie damy.

IV.9. Z ilu osób składa się klasa, jeżeli wiadomo, że 2-osobową delegację na akademię można wybrać na 300 sposobów?

IV.10. Ile prostych można przeprowadzić przez 5 punktów, z których żadne 3 nie są współliniowe?

IV.11. Jaką największą liczbę trójkątów można otrzymać z 10 linii prostych?

IV.12. Oblicz, ile przekątnych ma siedmiokąt wypukły.

IV.13. Oblicz, ile przekątnych ma n-kąt wypukły.

IV.14. Udowodnij równość: $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$.

IV.15. Udowodnij równość: $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

IV.16. Udowodnij równość: $\sum_{r=0}^{k} \binom{n}{r}\binom{m}{k-r} = \binom{m+n}{k}$.

IV.17. Udowodnij równość: $\binom{2n}{n} = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r}^2$.

IV.18. Udowodnij równość: $\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}$.

IV.19. Udowodnij równość: $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$.

IV.20. Udowodnij równość: $\sum_{k=0}^{n} \binom{r+k}{k} = \binom{r+n+1}{n}$.

IV.21. Udowodnij równość: $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$.

IV.22. Rzucamy 3 jednakowymi monetami równocześnie. Jakie wyniki możemy uzyskać?

IV.23. Ile jest wyników jednoczesnego rzutu 2 kostkami?

IV.24. Mamy r jednakowych kul i n komórek. Ile jest takich rozmieszczeń kul w komórkach, że żadna komórka nie jest pusta?

IV.25. Mamy 30 jednakowych piłek, które wrzucamy do 5 pudeł. Ile jest takich rozmieszczeń piłek w pudłach, że żadne pudło nie jest puste?

IV.26. Mamy r jednakowych kul i n komórek. Ile jest wszystkich możliwych rozmieszczeń kul w komórkach?

IV.27. Rozwiąż zadanie IV.22 i IV.23 na podstawie rozwiązania zadania IV.26.

IV.28. Ile wyników można uzyskać, jeżeli rzuca się k kostek i m monet równocześnie?

IV.29. Niech $n \in \mathbb{N}$. Na ile sposobów można przedstawić n jako sumę $k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_s$, gdzie k_i – liczby całkowite, $i = 1, 2, \ldots, s$, jeśli:
a) $k_i \geq 0$,
b) $k_i > 0$?

Rozdział V

PRAWDOPODOBIEŃSTWO

Zdarzenie elementarne jest to wynik zjawiska (doświadczenia losowego).

Zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych, czyli wszystkich wyników, oznaczamy przez Ω.

Przykłady.
1. Jednokrotny rzut monetą.
Istnieją 2 możliwe wyniki jednokrotnego rzutu monetą: orzeł i reszka, czyli
$\Omega_1 = \{O, R\}$.
2. Jednokrotny rzut kostką.
$\Omega_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
3. Dwukrotny rzut monetą.
W tym doświadczeniu zdarzeniami elementarnymi są uporządkowane pary:
$\Omega_3 = \{(O, O), (O, R), (R, O), (R, R)\}$.
4. Ustawienie w ciąg liczb 1, 2, 3.
$\Omega_4 = \{(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1)\}$.

Zdarzeniem nazywamy dowolny podzbiór zbioru zdarzeń elementarnych.
Na przykład podzbiór $X \subset \Omega_2$, $X = \{2, 4, 6\}$, jest zdarzeniem polegającym na tym, że wypadła parzysta liczba oczek.

Zdarzeniem przeciwnym do zdarzenia A nazywamy takie zdarzenie A', że $A \cap A' = \emptyset$ i $A \cup A' = \Omega$.
Na przykład zdarzeniem przeciwnym do $X \subset \Omega_2$, jest zdarzenie X', polegające na tym, że wypadła nieparzysta liczba oczek; $X' = \{1, 3, 5\}$.

Zbiór Ω nazywamy zdarzeniem **pewnym**.

Zbiór $\emptyset$ nazywamy zdarzeniem **niemożliwym**.

Jeżeli $A \subset \Omega$, to mówimy, że zdarzenie elementarne **sprzyja** zdarzeniu A, jeśli jest elementem zbioru A.

Na przykład zdarzenie elementarne: "w jednokrotnym rzucie kostką wypadło 5 oczek" sprzyja zdarzeniu $X' \subset \Omega_2$.

Moc zbioru $A \subset \Omega$ jest to liczba zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A. Moc zbioru A oznaczamy $\overline{\overline{A}}$.

Na przykład: $\overline{\overline{\Omega_1}} = 2$, $\overline{\overline{\Omega_2}} = 6$, $\overline{\overline{\Omega_3}} = 4$, $\overline{\overline{\Omega_4}} = 6$.

Aksjomatyczna definicja prawdopodobieństwa

Niech Ω będzie skończonym zbiorem zdarzeń elementarnych. Jeżeli każdemu zdarzeniu $A \subset \Omega$ przyporządkowana jest dokładnie jedna liczba $\mathrm{P}(A)$ taka, że

1. $\mathrm{P}(A) \geq 0$,
2. dla każdych $A, B \subset \Omega$ jeżeli $A \cap B = \emptyset$, to $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$,
3. $\mathrm{P}(\Omega) = 1$,

to mówimy, że na podzbiorach zbioru Ω jest określone prawdopodobieństwo P, a liczbę $\mathrm{P}(A)$ nazywamy prawdopodobieństwem zdarzenia A.

Twierdzenie klasyczne

Jeśli wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne (tzn. jeśli prawdopodobieństwo wszystkich zdarzeń elementarnych jest takie samo), to prawdopodobieństwo każdego zdarzenia jest ilorazem liczby zdarzeń elementarnych sprzyjających temu zdarzeniu przez liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych, czyli $\mathrm{P}(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}}$.

V.1. Rzucamy raz kostką do gry. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że otrzymamy parzystą liczbę oczek?

V.2. Mamy trzy kule z numerami 1, 2, 3. Losujemy trzy razy po jednej kuli bez zwracania, a z otrzymanych cyfr układamy liczbę trzycyfrową (pierwsza wylosowana cyfra jest cyfrą setek, druga – dziesiątek, a trzecia – jedności). Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że otrzymana liczba będzie większa niż 200?

V.3. Kostka sześcienna jest pomalowana na różowo. Krawędź kostki ma 3 cm długości. Kostkę tę rozcięto na 27 kostek o krawędzi 1 cm. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania na chybił trafił kostki, która:

a) ma 3 ściany różowe,
b) ma 4 ściany różowe,
c) ma 5 ścian różowych,
d) nie ma ani jednej ściany różowej?

V.4. Ze zbioru $\{1,2,3,...,10\}$ losujemy jedną liczbę. Sprawdź, co jest większe: prawdopodobieństwo tego, że otrzymana liczba będzie podzielna przez 3 lub przez 5, czy suma prawdopodobieństwa tego, że otrzymana liczba będzie podzielna przez 3 i prawdopodobieństwa tego, że będzie ona podzielna przez 5?

V.5. Ze zbioru $\{1,2,3,...,10\}$ losujemy jedną liczbę. Sprawdź, co jest większe: prawdopodobieństwo tego, że otrzymana liczba będzie podzielna przez 2 lub przez 3, czy suma prawdopodobieństwa tego, że otrzymana liczba będzie podzielna przez 2 i prawdopodobieństwa tego, że będzie ona podzielna przez 3?

Otrzymaną odpowiedź porównaj z odpowiedzią do zadania V.4.

V.6. Udowodnij, że jeżeli zdarzenia $A_1, A_2, ..., A_n$ wyłączają się parami, czyli dla każdych $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$ takich, że $i \neq j$ $A_i \cap A_j = \emptyset$, to $\mathrm{P}(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = \mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(A_2) + ... + \mathrm{P}(A_n)$.

V.7. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że losując jedną z 27 kostek z zad. V.3 wylosujemy kostkę, która ma 3 ściany różowe lub nie ma ani jednej ściany różowej?

V.8. Niech Ω będzie zbiorem zdarzeń elementarnych, a P prawdopodobieństwem określonym na podzbiorach zbioru Ω. Udowodnij, że $P(\emptyset) = 0$.

V.9. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wśród liczb 1, 2, 3, ..., 49, 50 losowo wybrana liczba okaże się podzielna przez 7 i przez 9?

V.10. Rzucamy 2 razy kostką do gry. Wykaż, że jest bardziej prawdopodobne, że liczba oczek, która wypadła w jednym z rzutów jest dzielnikiem liczby oczek, która wypadła w drugim rzucie, niż że żadna z nich nie dzieli drugiej.

V.11. Rzucamy dwukrotnie kostką do gry. W pierwszym rzucie wypadło a_1, a w drugim a_2 oczek. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że:

a) reszta z dzielenia przez 3 sumy $a_1 + a_2$ jest równa 1,

b) reszta z dzielenia przez 4 iloczynu $a_1 \cdot a_2$ jest równa 2?

V.12. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że przy 4-krotnym rzucie kostką do gry 3 kolejne wyniki utworzą ciąg geometryczny.

V.13. Mamy 8 kul ponumerowanych liczbami od 1 do 8 i 10 komórek ponumerowanych liczbami od 1 do 10. Rozmieszczamy w dowolny sposób kule w komórkach. Co jest bardziej prawdopodobne: to, że wszystkie kule znajdą się w komórkach o numerach parzystych, czy to, że komórki o numerach 1, 2, 3, 4, 5 będą puste?

V.14. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że przy rozmieszczeiu k różnych kul w n komórkach ustalona komórka będzie zawierała jedną ustaloną kulę.

V.15. Niech $A \subset \Omega$, a A' niech będzie zdarzeniem przeciwnym do A. Udowodnij, że $P(A') = 1 - P(A)$.

V.16. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że przy rozmieszczeniu k różnych kul w n komórkach ustalona komórka będzie zawierała co najmniej jedną kulę.

V.17. Z liczb 1, 2, 3, 4, 5 losujemy kolejno bez zwracania dwie: a i b. Układając je w kolejności losowania tworzymy liczbę dwucyfrową $10a+$ $+b$. Oznaczmy przez P prawdopodobieństwo tego, że będzie to liczba podzielna przez 3. Wykaż, że P jest pierwiastkiem równania $25x^2+$ $+5x - 6 = 0$.

V.18. W urnie jest 9 kul ponumerowanych liczbami od 1 do 9. Losujemy kolejno 2 kule nie zwracając ich do urny. Z cyfr na wylosowanych kulach tworzymy liczbę dwucyfrową: cyfra wylosowana na pierwszej kuli jest cyfrą jedności, druga – cyfrą dziesiątek. Niech P_a, P_b, P_c oznaczają odpowiednio prawdopodobieństwa tego, że:

a) otrzymana liczba jest parzysta,

b) obie cyfry są nieparzyste,

c) otrzymana liczba nie jest mniejsza niż 12.

Wykaż, że $P_a + 2P_b = P_c$.

V.19. Z cyfr 1, 2, 3, ..., 9 losujemy kolejno bez zwracania trzy cyfry a, b, c i układamy je w kolejności losowania w liczbę abc (zapis w dziesiętnym układzie pozycyjnym). Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że otrzymana liczba jest większa niż 666?

V.20. W 12-piętrowym budynku jedzie windą k osób. Niech P_k oznacza prawdopodobieństwo tego, że każda osoba wysiądzie na innym piętrze. Oblicz P_k, jeśli k spełnia równanie:

a) $x^2 - 12x - 13 = 0$,

b) $2x^2 - 17x + 8 = 0$.

V.21. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wśród k losowo wybranych osób każda osoba obchodzi urodziny innego dnia roku.

V.22. Losowo ustawia się ciąg 8 osób. Niech P_i oznacza prawdopodobieństwo tego, że ustalonych i osób stoi na ustalonych dla siebie i miejscach $(i = 1, 2, ..., 8)$. Udowodnij, że $\dfrac{P_2 \cdot P_4 \cdot P_6 \cdot P_8}{P_1 \cdot P_3 \cdot P_5 \cdot P_7} = \dfrac{1}{105}$.

V.23. Zbiór $\{1,2,3,\ldots,10\}$ został uporządkowany w sposób losowy. Oblicz jakie jest prawdopodobieństwo tego, że w tym uporządkowaniu 2 i 7 wystąpią obok siebie.

V.24. 10 osób posadzono przy okrągłym stole. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że ustalone 2 osoby będą siedziały obok siebie.

V.25. Losowo ustawia się ciąg n osób, wśród których są A i B. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że między A i B stanie dokładnie r osób?

V.26. W sklepie były piłki w pięciu kolorach: białym, niebieskim, czerwonym, fioletowym i zielonym. Troje dzieci kupiło po jednej piłce. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że kupione piłki były w kolorach białym, czerwonym i zielonym?

V.27. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w grupie 20 wybranych losowo osób, 3 spośród nich urodziły się w sobotę, a 5 w niedzielę?

V.28. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w 12 rzutach kostką każdą liczbę oczek otrzymamy dokładnie 2 razy.

V.29. Spośród pięciu prętów o długościach 1, 3, 4, 5, 6 losujemy trzy pręty. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że z wylosowanych prętów można zbudować:

a) trójkąt,

b) trójkąt prostokątny?

V.30. W urnie jest 10 kul białych i 5 czarnych;

a) wyjęto z urny 1 kulę, która okazała się biała,

b) wyjęto z urny 14 kul i okazało się, że w urnie została kula biała.

Prawdopodobieństwo którego zdarzenia jest większe i ile wynosi?

V.31. Jakie jest prawdopodobieństwo trafienia

a) czwórki,

b) piątki,

c) szóstki w totolotku? (Losujemy 6 z 49.)

V.32. W loterii jest N losów, z których n wygrywa. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że posiadacz r losów ma co najmniej jeden los wygrywający.

V.33. W loterii jest n losów, z których k wygrywa, a m daje prawo do wyciągnięcia następnego losu. Jakie jest prawdopodobieństwo wygranej?

V.34. Uczeń umie odpowiedzieć na 20 spośród 25 pytań egzaminacyjnych. Na egzaminie otrzymał 3 pytania. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że uczeń dobrze odpowie na co najmniej 2 pytania?

V.35. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wśród trzynastu losowo wybranych kart znajduje się dokładnie k par dziewiątek ($k = 0, 1, 2$)?

V.36. W czasie spotkania towarzyskiego, na którym było 5 par małżeńskich, wybrano losowo 2 mężczyzn i 2 kobiety. Wykaż, że prawdopodobieństwo tego, że wśród losowo wybranych osób będzie dokładnie jedna para małżeńska jest 2 razy większe niż prawdopodobieństwo tego, że nie będzie wśród nich męża i żony.

V.37. W urnie jest n kul, z których 5 jest czarnych. Ile co najwyżej kul może być w urnie, aby przy jednoczesnym losowaniu 2 kul prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul czarnych było większe niż $\frac{1}{3}$?

V.38. W urnie są kule białe, czerwone i zielone. Kul zielonych jest 2 razy więcej niż białych, a czerwonych jest 3 razy więcej niż białych. Ile jest kul białych, jeżeli przy jednoczesnym losowaniu trzech kul prawdopodobieństwo wylosowania każdej kuli w innym kolorze jest równe $\frac{12}{55}$?

V.39. Rzucamy pięcioma różnymi monetami. Jakie jest prawdopodobieństwo wyrzucenia orła co najmniej 3 razy?

V.40. Niech P_k oznacza prawdopodobieństwo tego, że wśród k losowo wybranych osób dokładnie jedna para obchodzi urodziny tego samego dnia roku (a wszystkie pozostałe osoby – każda innego dnia). Oblicz $\frac{P_k}{P_{k+1}}$.

V.41. Z czterech cyfr: 1, 2, 3, 4 układamy wszystkie liczby trzycyfrowe czterocyfrowe, przy czym w każdej liczbie każda cyfra może występowa tylko raz. Wybieramy jedną liczbę trzycyfrową i jedną czterocyfrową Co jest bardziej prawdopodobne: że liczbą trzycyfrową będzie 123, cz że liczbą czterocyfrową będzie 1234?

V.42. Zbiór {1,2,3,...,10} uporządkowano w sposób losowy. Jakie jest praw dopodobieństwo tego, że w tym uporządkowaniu 3 wystąpi przed 1?

V.43. Dwóch graczy rzuca N razy monetą. Wykaż, że prawdopodobieństw tego, iż otrzymają tę samą liczbę orłów jest równe $\frac{\binom{2N}{N}}{2^{2N}}$.

V.44. W 6 komórkach rozmieszczamy 6 kul (kule i komórki są rozróżnialne) Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że co najmniej 2 komórki będ puste?

V.45. Rozpatrzmy dwa zbiory: $X = \{1,2,3,4,5\}$ i $Y = \{1,2,3,...,10\}$ ora wszystkie funkcje $f : X \longrightarrow Y$. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, ż zbiór wartości losowo wybranej funkcji okaże się 5-elementowy?

V.46. Ze zbioru kolejnych liczb naturalnych od 1 do 100 wybieramy losow jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że jest to liczba podziel na przez 3 lub przez 4.

V.47. Niech Ω będzie danym zbiorem zdarzeń elementarnych i niech P będzie prawdopodobieństwem określonym na podzbiorach zbioru Ω. Udowo dnij, że dla każdych $A, B \subset \Omega$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

V.48. Rozwiąż zad. V.46 wykorzystując wzór z zad. V.47.

V.49. Rzucamy dwiema kostkami do gry. Oblicz prawdopodobieństwo wyrzucenia co najmniej jednej czwórki lub jednej szóstki.

V.50. Z talii 52 kart losujemy 5 kart. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania dokładnie jednego króla lub dokładnie jednej karty koloru czerwonego.

V.51. Rozpatrzmy zbiór funkcji $f : \{0,1,2,...,9\} \longrightarrow \{1,2,3,4,5\}$. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że zbiór wartości losowo wybranej funkcji będzie 2-elementowy?

V.52. 10 kul ponumerowanych liczbami od 1 do 10 r szczono w 3 szufladach. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że przynajmniej jedna szuflada będzie pusta?

V.53. Niech Ω będzie danym zbiorem zdarzeń elementarnych i niech P będzie prawdopodobieństwem określonym na podzbiorach zbioru Ω. Udowodnij, że dla każdych $A, B, C \subset \Omega$ $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$.

V.54. Rozwiąż zad. V.52 wykorzystując wzór z zad. V.53.

V.55. Mamy 3 listy i 3 odpowiednio zaadresowane koperty. Wkładamy listy do kopert na chybił trafił. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że żaden list nie trafi do swojej koperty?

V.56. Mamy 10 kul białych i 5 czarnych. Układamy je jedna za drugą w sposób losowy. Co jest bardziej prawdopodobne: że otrzymamy 5 serii kul białych i 4 serie kul czarnych, czy że otrzymamy 4 serie kul białych i 4 serie kul czarnych?

rys. 3

Uwaga: przez serię kul rozumiemy dowolną liczbę kul jednego koloru ustawionych jedna za drugą; na przykład w uporządkowaniu przedstawionym na rys. 3 występują 4 serie kul białych i 3 serie kul czarnych.

V.57. Mamy b kul białych i c kul czarnych. Układamy je jedna za drugą w sposób losowy. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że w takim uporządkowaniu będzie dokładnie k serii dowolnego typu?

V.58. Niech $A, B \subset \Omega$ i $B \subset A$. Udowodnij, że wówczas $P(A \setminus B)$
$= P(A) - P(B)$.

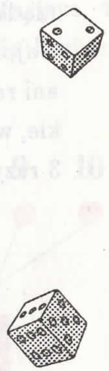
V.59. Wykonujemy doświadczenie polegające na rzucaniu monetą aż do otrzy
mania orła. Oznaczmy przez P_n prawdopodobieństwo tego, że prób
skończy się dokładnie po n rzutach. Oblicz P_n i $\sum_{n=1}^{\infty} P_n$.

V.60. Rzucamy monetą aż do uzyskania pierwszego orła. Oblicz prawdopo
dobieństwo tego, że będzie potrzebna parzysta liczba rzutów.

V.61. Wykonujemy doświadczenie polegające na rzucaniu kostką aż do otrzy
mania jedynki. Oznaczmy przez P_n prawdopodobieństwo tego, że prób
skończy się dokładnie po n rzutach.

a) Oblicz P_n.

b) Dla jakiego n prawdopodobieństwo P_n jest największe. Zinterpretu
uzyskany wynik.



Część trzecia

ROZWIĄZANIA ZADAŃ